د. عبد الباسط الذهبي

التاريخ 5/10/2015

الموضوع: منطق رياضي — المحاضرة (1)

الفصل الأول: المجموعات المرتبة جزئياً

نقول عن مجموعة إنها مجموعة مرتبة جزئية إذا كانت غير خالية ومعرف عليها علاقة ترتيب $(S, \leq)$ حيث S مجموعة غير خالية.

S مجموعة مرتبة جزئياً أي إذا عرفنا على S علاقة ثنائية $\leq$ $\forall x, y \in S$ ، $x R y \Leftrightarrow x \leq y$

- تكون علاقة ترتيب إذا حققت الشروط التالية:

1- إذا كانت انعكاسية أي كل عنصر يرتبط بنفسه

$\forall x \in S \Rightarrow x \leq x$

2- إذا كانت تخالفية

if $x \leq y$ ، $y \leq x \Rightarrow x = y$

إذا كان $\forall x, y \in S$

3- إذا كانت متعدية

if $x \leq y$, $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ ، $x, y, z \in S$

وتكون علاقة الترتيب الجزئي عبارة عن علاقة تكافؤ إذا حققت: 1- تناظرية 2- انعكاسية 3- متعدية

البنية الجبرية: $(G, *)$:

هي مجموعة غير خالية معرف عليها عملية تشكيل داخلي واحدة على الأقل

- $(S, \leq)$ بنية الشبكة: مجموعة مرتبة جزئياً وغير خالية معرف عليها عملية ترتيب جزئية

أمثلة:

-1 $(N, \leq)$ مجموعة مرتبة كلياً أي عنصرين منها يمكن مقارنتهما أي مرتبطان ببعضهما وفق العلاقة الثنائية:

-2 $(N^*, \leq)$ حيث $x \leq y \Leftrightarrow x / y$ علاقة ترتيب وليست مرتبة كلياً

لأنه يمكن إيجاد عددين غير متقارنين

3 لتكن المجموعة $X=\{1,2,3\}$ الاحتواء $(P(X),\subseteq)$

$P(X)=2^{x}=2^{3}$

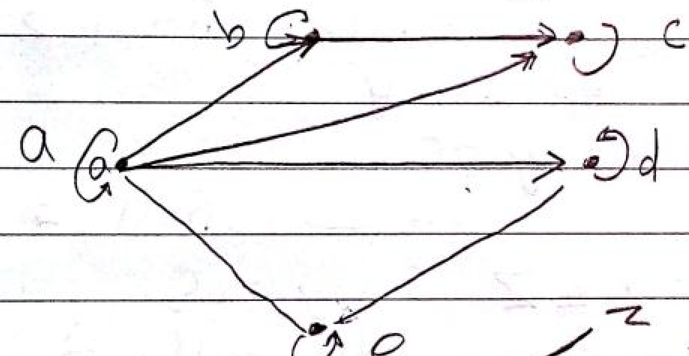
$A\subseteq B \Leftrightarrow A\leq B$

مثال: لتكن لدينا مجموعة مرتبة جزئياً أو نرسم المخطط الرسمي لبيانات هذه العلاقة:

لتكن لدينا $E=\{a,b,c,d,e\}$ ولتكن:

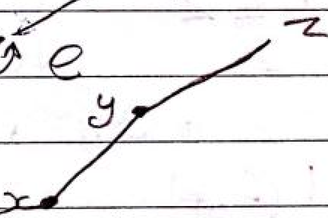
$R=\{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(b,c),(a,c),(a,d),(d,e),(a,e),(a,b)\}$ هو بيانات العلاقة

المطلوب: ارسم المخطط السهمي لبيان هذه العلاقة:

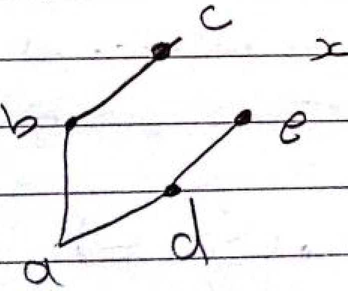


نستعيض عن هذا المخطط بمخطط هاسن Hass

$x\leq y$ ، $y\leq z$



مخطط هاسن للمثال السابق:



e،c ليس لهما علاقة ببعضهما

اما a,e ، (a,c) علاقة متعدية

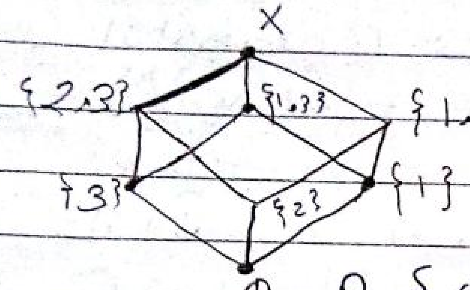
مثال (2): $X=\{1,2,3\}$

$P(X)=\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},X\}$

ارسم مخطط هاسن لهذه العلاقة وفق علاقة الاحتواء

تنويه: أي مجموعة منتهية مكونة من 8 عناصر مخطط هاسن لها يكون بشكل متوازي مستطيلات.

ملاحظة: $\emptyset$ يجب ألا تكون على استقامة $\{2\}$ او $\{3\}$



مثال (3)

لتكن المجموعة $X=\{a_1,a_2\}$

$P=\{\phi,\{a_1\}\}$ $\quad Q=\{\phi,\{a_2\}\}$

ولنعرف على المجموعة $P\times Q$

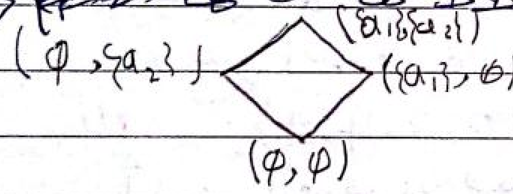
$(a_1,b_1)\le(a_2,b_2) \Leftrightarrow a_1\subseteq a_2 \,,\, b_1\subseteq b_2$

- أوجد $P\times Q$
- بين أن $P\times Q$ بالنسبة لعلاقة الاحتواء هي مجموعة مرتبة جزئياً ثم ارسم مخطط هاس لها.

الحل:

$P\times Q=\{(\phi,\phi),(\phi,\{a_2\}),(\{a_1\},\phi),(\{a_1\},\{a_2\})\}$

أي مجموعة تحوي أربع عناصر بشكل مخطط هاس لها ◇ ~~[illegible]~~



العناصر الأصغرية والأعظمية:

هناك المجموعات مرتبة جزئياً:

تعريف: لتكن $(E,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً عندئذ:

(1) إذا كان يوجد في المجموعة E عنصراً مثل l يحقق الشرط $l\le x \;;\; \forall x\in E$ نقول عن l أنه عنصر أصغري في E

مثال: في المجموعة $(P(X),\subseteq)$ فإن ϕ عنصر أصغري و X هي عنصر أكبر

تعريف (2): إذا كانت $(E,\le)$ مجموعة مرتبة جزئياً.

أ- إذا كان يوجد في E عنصر مثل m بحيث لا يوجد في E عنصر x يحقق العلاقات: $m\le x \,,\, x\neq m$ في هذه الحالة نسمي m عنصر أعظمي.

2- إذا وجد في E عنصر مثل n بحيث أنه لا يوجد في E أي عنصر مثل x يحقق $x \neq n$ ، $x \leq n$ في هذه الحالة نسمي n أصغري

مبرهنة زورن:

إذا كانت $(E, \leq)$ مجموعة مرتبة جزئياً ومنتهية فإن E تحتوي حتماً على عنصر أعظمياً

ملاحظات:

1- إذا كانت E مجموعة غير منتهية فقد تحتوي على عناصر أصغرية وأعظمية وقد لا تحتوي على أي منها.

2- إذا كان P عنصر غير متقارن مع أي عنصر آخر في مجموعة مرتبة جزئياً أي ليس مرتبط مع أي عنصر فإن P هو عنصر أصغري وأعظمي بنفس الوقت

3- العنصر الأكبر في المجموعة المرتبة جزئياً هو عنصر أعظمي والعكس ليس صحيح بالضرورة.

العنصر الأصغر في المجموعة المرتبة جزئياً هو عنصر أصغري والعكس غير صحيح بالضرورة.

مثال: $E = \{2, 3, 4, 9\}$ مع علاقة يقسم.

أوجد العناصر الأصغرية والأعظمية في هذه المجموعة.

العناصر الأصغرية 2 ، 3

العناصر الأعظمية 4 ، 9

المجموعات الجزئية المحدودة:

إذا كانت $(E, \leq)$ مرتبة جزئياً و A جزئية منها ، $A \subseteq E$

عندئذ إذا كان يوجد في E عنصر مثل S أي: $\forall x \in A , S \geq x$

في هذه الحالة نقول أن S هو حد أعلى لـ A في E

وإذا كان $t \in E$ أي $\forall x \in A , x \geq t$ في الحالة نقول عن t أنه حد أدنى لـ A في E والحدود الدنيا والعليا ليست وحيدة

مثال: $E = \{2, 3, 4, 9\}$ مجموعة من الأعداد الطبيعية

والمرتبة جزئياً وفق علاقة القسمة ، 2 ليس حداً أعلى
لأن 9 لا يقسم 12 و نأخذ أي عدد من N ويجب أن تكون جميع
الأعداد تقسمه .

مثال: حد أعلى 36 ، 72 ومضاعفاتها ، حد أدنى 1 يقسم الجميع.

تعريف الحد الأعلى الأصغري sup :

يحقق شرطان حد أعلى و أصغر الحدود العليا ، أي :

تعريف: لتكن $(E,\leq)$ م.م.ج ، $A \subseteq E$ نقول عن S من E أنه حد أعلى أصغري للمجموعة A ويرمز له بـ $\sup A$ إذا احقق الشرطان:

1- S هو حد أعلى لـ A

2- S أصغر الحدود العليا أي أنه إذا كان S' حداً أعلى آخر فإن $S \leq S'$

وبالمقابل نعرف الحد الأدنى الأعظمي للمجموعة الجزئية A من E الذي نرمز له بالرمز $\inf A = t$ إذا تحقق الشرطان:

(1) t حد أدنى لـ A في E

(2) t أكبر الحدود الدنيا أي أنه إذا وجد t' هو حد أدنى آخر لـ t فإن $t' \leq t$

مثال: إذا كان $(R,\leq)$ مرتبة جزئياً ولتكن A مجموعة جزئية منها

$$A = \{\tfrac{1}{n} \in R , n \in \mathbb{Z}^*\}$$

$$\inf A = 0 \quad , \quad \sup A = 1$$

ملاحظة: ليس من الضروري أن يكون لـ A أي inf أو sup وإذا وجد أي منها فيمكن أن ينتمي إلى A ويمكن ألا ينتمي إليها.

تعريف المجموعة المرتبة جيداً:

نسمي A المجموعة المرتبة كلياً هي مجموعة مرتبة جيداً إذا كانت كل مجموعة جزئية منها غير خالية تحوي عنصر أصغر

N مجموعة مرتبة جيداً.

Z غير مرتبة جيداً.